# ÁNGULOS I

***Ejercicio nº 1.-***

a) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(0, 1, -1)$ y es paralela a los planos $\pi_1$: $x + 2y - z - 2 = 0$, $\pi_2$: $2x + y + 2z - 1 = 0$.

b) Halla el ángulo que forman $\pi_1$ y $\pi_2$.

***Ejercicio nº 2.-***

Halla el ángulo que forma la recta

$$r: \begin{cases} 3x - y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

y el plano $\pi$: $2x - y + 4z - 2 = 0$.

***Ejercicio nº 3.-***

a) Determina la ecuación del plano $\pi$ que pasa por el punto $P(1, -2, 0)$ y es perpendicular a la recta $r$:$\{x + y = 0, \quad y - 3z + 2 = 0\}$.

b) Halla el ángulo que forman los planos siguientes:

$\pi_1$: $x + y = 0$ $\quad$ $\pi_2$: $y - 3z + 2 = 0$

***Ejercicio nº 4.-***

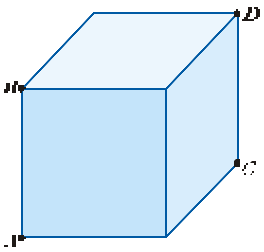
a) Halla el ángulo que forman las rectas:

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$$

b) Obtén la ecuación del plano que contiene a $r$ y es paralelo a $s$.

***Ejercicio nº 5.-***

En la figura adjunta, calcula el ángulo que forma la recta $CD$ con la recta que une $D$ y el punto medio de $AB$.




***Ejercicio nº 6.-***

Halla el ángulo que forma la recta

$$r: \begin{cases} 3x - y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

y el plano $\pi$: $2x - y + 4z - 2 = 0$.

# SOLUCIONES

***Solución nº 1:***

a) Al ser paralela a los planos $x + 2y - z - 2 = 0$, $2x + y + 2z - 1 = 0$, es también paralela a la recta:

$$\begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0 \\ 2x + y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

determinada por ambos, cuyo vector dirección $\vec{d}$, es:

$$\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{d} = (5, -4, -3)$$

La ecuación de la recta buscada es: $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z+1}{-3}$

b) Los vectores normales son:

$\vec{n}_1 = (1, 2, -1)$ y $\vec{n}_2 = (2, 1, 2)$

$$cos\,\alpha = \frac{|(1, 2, -1) \cdot (2, 1, 2)|}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{4+1+4}} = \frac{2}{\sqrt{54}} = 0{,}27 \;\rightarrow\; \alpha = 74^\circ$$

***Solución nº 2:***

Determinamos un vector dirección de $r$, $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 8\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$\vec{v} = (5, 8, 7)$$

Por otro lado, el vector normal al plano es:

$\vec{n} = (2, -1, 4)$

Por tanto:

$$cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{|10 - 8 + 28|}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{138}} = \frac{30}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{138}} = 0{,}5573$$

$$90^\circ - \alpha = arccos\;(0{,}5573) = 56^\circ \;\rightarrow\; \alpha = 34^\circ$$

***Solución nº 3:***

a) Vector dirección de la recta: $(1, 1, 0) \times (0, 1, -3) = (-3, 3, 1)$

Este vector es perpendicular a $\pi$. Por tanto:

$\pi_i$: $-3(x - 1) + 3(y + 2) + z = 0 \;\rightarrow\; -3x + 3y + z + 9 = 0$

b) El vector normal a $\pi_1$ es $\vec{n}_1 = (1, 1, 0)$ y el vector normal a $\pi_2$ es $\vec{n}_2 = (0, 1, -3)$. Así:

$$cos\,\alpha = \frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{|0+1+0|}{\sqrt{1+1+0}\cdot\sqrt{1+9}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = 0{,}22 \;\rightarrow\; \alpha = 77^\circ$$

***Solución nº 4:***

a) El vector dirección de $r$ es $\vec{d}_r = (1, -2, 0)$, y el de $s$ es $\vec{d}_s = (2, -1, 1)$. Así:

$$cos\,\alpha = \frac{|\vec{d}_r\cdot\vec{d}_s|}{|\vec{d}_r|\cdot|\vec{d}_s|} = \frac{4}{\sqrt{1+4}\cdot\sqrt{4+1+1}} = \frac{4}{\sqrt{30}} = 0{,}73 \;\rightarrow\; \alpha = 43^\circ$$

b) El plano buscado pasa por $(1, 0, 2)$ y su vector normal es $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$.

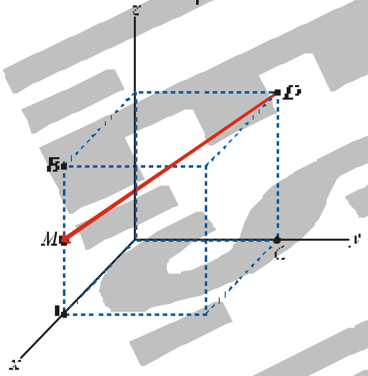
$\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (-2, -1, 3)$

Así:

$-2(x - 1) - 1\cdot y + 3(z - 2) = 0 \;\rightarrow\; -2x - y + 3z - 4 = 0$

***Solución nº 5:***

Consideremos que el cubo es de lado 1 y está centrado en el origen.




Así $A(1, 0, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(0, 1, 0)$ y $D(0, 1, 1)$

$$M = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{DM} = \left(1, -1, \frac{-1}{2}\right), \ \vec{DC} = (0, 0, -1)$$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{DM} \cdot \vec{DC}\right|}{\left|\vec{DM}\right| \cdot \left|\vec{DC}\right|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{9}{4}} \cdot \sqrt{1}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\alpha = 70{,}53^\circ$$

***Solución nº 6:***

Determinamos un vector dirección de $r$, $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 8\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$\vec{v} = (5, 8, 7)$$

Por otro lado, el vector normal al plano es:

$$\vec{n} = (2, -1, 4)$$

Por tanto:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{\left|\vec{v} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\vec{v}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} = \frac{\left|10 - 8 + 28\right|}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{138}} = \frac{30}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{138}} = 0{,}5573$$

$$90^\circ - \alpha = \arccos\ (0{,}5573) = 56^\circ \quad \rightarrow \quad \alpha = 34^\circ$$